数理解析研究所講究録
第2030巻 2017年 116-121

Support theorem for reflected diffusion processes

会田 茂樹 (東北大学 大学院理学研究科 数学専攻)
Shigeki Aida (Mathematical Institute, Tohoku University)

確率分布の位相的台 (サポート) の決定は基本的な問題である. $\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程の分布のサポートは, Wong-Zakai の近似定理 (これはサポート定理の簡単な方の包含関係を示す) と確率微分方程式の解のブラウン運動の汎関数としてのある種の "連続性" を示すこと (この結果は逆の包含関係を意味する, こちらが難しいとされている) により Stroock-Varadhan [15] により決定された. 彼らは, この結果を拡散過程の生成作用素の subharmonic function に対する最大値原理が成立する集合を決定する問題に応用した. その後, 抽象的な設定でのサポート定理 [5], それを確率微分方程式などの解の場合に使いやすい形に論法を修正した [12] などの研究がある. ただし rough path の概念が現れてからは確率微分方程式の解は rough path の連続な汎関数と捉えられるようになったため, driving rough path のサポートを決定すればよいことになり, 特別な工夫はある意味不要になった. Hairer の regularity structure や Gubinelli-Imkeller-Perkowski の paracontrolled distribution を用いて解析される singular SPDE に対するサポート定理の研究も始まっている. ただし, 反射壁の確率微分方程式や経路依存の確率微分方程式の解の場合はまだ, rough path の範疇での解析があまり進んでおらず, 事情は異なる.

古典的なブラウン運動で駆動される伊藤の反射壁確率微分方程式の場合を考えよう. $\mathbb{R}^d$ 内の滑らかな領域 D における (oblique reflection も含む) 反射壁確率微分方程式の解のサポートを決定する問題は, Wong-Zakai の近似定理とともに [9] で研究された. しかし, normal reflection の反射壁確率微分方程式の強い一意解の存在はゆるい条件 (A), (B) の下で税所 [14] により示されている. 条件 (A), (B) は以下のような条件である.

Definition 1. $z \in \mathbb{R}^d$ を中心とする半径 r のボールを $B(z,r)$ と書く. $x \in \partial D$ における内向き単位法線ベクトル全体の集合 $\mathcal{N}_x$ を

$$\mathcal{N}_x = \cup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}, \tag{1}$$

$$\mathcal{N}_{x,r} = \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{n}| = 1, B(x - r\boldsymbol{n}, r) \cap D = \emptyset \right\}. \tag{2}$$

と定める.

(A) 定数 $r_0 > 0$ が存在して,

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset \quad \text{for any } x \in \partial D.$$

(B) 次の条件を満たす定数 $\delta > 0$, $0 < \delta' \leq 1$ が存在する.
任意の $x \in \partial D$ に対して, 単位ベクトル l_x が存在して,

$$(l_x, \boldsymbol{n}) \geq \delta' \qquad \text{for any } \boldsymbol{n} \in \cup_{y \in B(x,\delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y.$$

この, (A), (B) という境界に対する仮定の下, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ のとき, 反射壁確率微分方程式

$$Y_t(B) = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s(B)) \circ dB_s + \Phi_t(B), \quad \xi \in \bar{D} \tag{3}$$

は強い一意解を持つ. ここで, B_t は n 次元ブラウン運動である.
Φ_t は $\Phi_t = \int_0^t 1_{\partial D}(Y_s)\mathbf{n}(Y_s)d\|\Phi\|_{1\text{-}var,[0,s]}$ を満たす反射項, $\mathbf{n}(x)$ は $x \in \partial D$ での内向き単位法線ベクトル, $\|\Phi\|_{1\text{-}var,[s,t]}$ は Φ の時間区間 $[s,t]$ における有界変動ノルムを表す. なお, (A), (B) の条件の下, (3) において, σ を identity, B_t を一般な連続な path w に変更した (deterministic な) Skorohod 方程式 $y_t = w_t + \phi_t$, に一意的な解が存在すること, 写像 $w \mapsto y$ は一様収束の位相に関して, 連続であること, ϕ ($L(w)$ と書こう) の有界変動ノルムが w の連続率を用いて評価されることも [14] で示されている. なお, L を用いると, 反射壁の条件は

$$L\left(\xi + \int_0^t \sigma(Y_s(B)) \circ dB_s\right)_t = \Phi_t(B)$$

と書けることになる. Wong-Zakai 型の定理は境界に対する条件 (A), (B) および, (C) の下で [4, 16] により示された. 条件 (C) は [14] で導入された条件で, Lions-Sznitman [11] で用いられていた条件を弱めた条件である. これらに引き続いて, [3] において, 条件 (A), (B) または D が凸という条件の下で, Wong-Zakai 型の定理が示された. また, [3] の結果と [2] の Lemma 5.1 の証明を合わせると以下の結果がわかる.

Lemma 2. ブラウン運動 B_t $(0 \le t \le T)$ を分点 $\{2^{-N}kT \mid 0 \le k \le 2^N\}$ で折れ線近似したパス B_t^N に対する, (3) の解を Y_t^N, Φ_t^N と書く. さらに, $Z_t^N = Y_t^N - \Phi_t^N$ とおく. このとき, 適当な部分列 $N_k \uparrow \infty$ を取り,

$$\Omega_1 = \left\{B \in W^n \;\middle|\; \max_{0\le t\le T}\left\{|Y_t^{N_k} - Y_t| + |Z_t^{N_k} - Z_t| + |\Phi_t^{N_k} - \Phi_t|\right\} \to 0 \quad as\ N_k \to \infty\right\}.$$

と定めると $\mu(\Omega_1) = 1$ とできる.

なお, さらに条件 (C) を仮定すると上記の結果は部分列を取る必要が無く成立することもわかる (これは [2] で示されている). Ren-Wu [13] はこの Wong-Zakai 型の結果と [12] による論法を組み合わせて、(A), (B), (C) (あといくつか条件が仮定されているが彼らの議論でもこれらの余分な条件が無くても証明できると思われる) の条件の下, サポート定理を証明した.

我々は, [2] において, 反射壁の rough differential equation(=Reflected RDE,RRDE) を定式化し, (A), (B) にさらに付加的な条件 (H1) の下, 解の存在を証明した. 証明は, Davie による反射壁の無い RDE の場合の Euler-Maruyama 近似の議論を修正して行う. この条件 (H1) は implicit Skorohod 方程式を解くためにも用いられるが, これに関しては, 条件 (A), (B) のみで十分であることがわかった ([1] を参照). しかし, その他でも条件 (H1) を用いる箇所があり, この部分がまだ条件 (H1) 無しで示せるかわからないため, 以前の論法を用い, (A), (B) のみで示せるか不明と思われる.

一方, 最近の論文 [1] では, Gubinelli の controlled path の空間を用いて, RRDE を定式化して, 条件 (A), (B) の下で解の存在評価を示すことに成功した. この講演では, この論文の結果を用いた反射壁確率微分方程式の解のサポート定理の証明を紹介する. なお, [1] では,

RRDE を含む経路依存の RDE を定式化して, 解の存在, 評価を示していることを注意しておく.

[1] の証明には, Gubinelli の controlled path の空間が必要だが, 結果を述べるだけなら, [2] で説明している Davie 流の定式化で述べることが可能であるため, そのような形で述べることにする.

$1/3 < \beta \le 1/2$ とする. $\mathbf{X}_{s,t} = (X_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$ $(0 \le s \le t \le T)$ を $\mathbb{R}^n$-値 β-Hölder rough path とし,

$$\|X\|_\beta = \sup_{0\le s<t\le T} \frac{|X_{s,t}|}{(t-s)^\beta}, \quad \|\mathbb{X}\|_{2\beta} = \sup_{0\le s<t\le T} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{(t-s)^{2\beta}}, \quad |||\mathbf{X}|||_\beta = \|X\|_\beta + \sqrt{\|\mathbb{X}\|_{2\beta}}$$

とおく. $\mathscr{C}^\beta(\mathbb{R}^n)$ で β-Hölder rough path 全体を表す. $\mathscr{C}^\beta(\mathbb{R}^n)$ は, $\rho(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \|X_1 - X_2\|_\beta + \|\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2\|_{2\beta}$ を用いて, 完備距離空間になる. さらに, $\widetilde{|||\mathbf{X}|||}_\beta = \sum_{i=1}^3 |||\mathbf{X}|||_\beta^i$ と定める. また, 反射の効果を表す有界変動項に対しては, 次のようなノルムも用いる.

$$\|\Phi\|_{1\text{-}var,\beta} = \sup_{0\le s<t\le T} \frac{\|\Phi\|_{1\text{-}var,[s,t]}}{(t-s)^\beta}.$$

[1] の主結果は, 次の通りである. 一般的な状況で一意性はまだ示されていないが $\mathbb{R}$ 上の RRDE で driving path が multidimensional rough path の場合 ($d = 1$, $n \ge 2$ の場合) の一意性は [7] で研究されている.

Theorem 3. D は条件 (A), (B) を満たすとする. $\sigma \in \mathrm{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$, $\xi \in \bar{D}$ とする. ただし, $\beta\gamma > 1$ となるように γ を取る. このとき, β-Hölder 連続なパス $(Y_t) \in \mathcal{C}^\beta([0,T], \mathbb{R}^d)$ と有界変動連続なパス (Φ_t) が存在し,

$$Y_t = \xi + \int_0^t \sigma(Y_s)d\mathbf{X}_s + \Phi_t, \tag{4}$$

$$\Phi_t = L\left(\xi + \int_0^\cdot \sigma(Y_s)d\mathbf{X}_s\right)_t \tag{5}$$

を満たす. さらに, この解は以下の条件を満たす: 定数 C_1, C_2 が存在して,

$$\|Z\|_\beta + \|R^Z\|_{2\beta} + \|\Phi\|_{1\text{-}var,\beta} \le C_1 \left(1 + \widetilde{|||\mathbf{X}|||}_\beta^{1/\beta}\right)^{C_2} (1+T)\,\widetilde{|||\mathbf{X}|||}_\beta.$$

ただし, $Z_t = Y_t - \Phi_t$, $R^Z_{s,t} = Z_t - Z_s - \sigma(Y_s)X_{s,t}$ であり定数 C_i は $\sigma, \beta, \gamma, \delta, \delta', r_0$ にのみ依存する.

なお, 積分 (4) は $Y_0 = \xi$ かつ定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して,

$$\left|Y_t - Y_s - \sigma(Y_s)X_{s,t} - (D\sigma)(Y_s)\left(\sigma(Y_s)\mathbb{X}_{s,t}\right) - (D\sigma)(Y_s)\left(\int_s^t \Phi_{s,r} \otimes dX_r\right) - \Phi_{s,t}\right| \le C|t-s|^{\beta\gamma}$$

であることを意味する. この結果を Brownian rough path に対して適用し, 反射壁確率微分方程式の解の位相的サポートを決定しよう. そのため, ブラウン運動 B_t の 2 進折れ線近似のパス B_t^N に対して $\mathbb{B}^N_{s,t} = \int_s^t B^N_{s,u} \otimes dB^N_u$ とおき,

$$\Omega_2 = \left\{B \in W_0^n \mid \text{滑らかなラフパス } (B^N_{s,t}, \mathbb{B}^N_{s,t}) \text{ は } \mathscr{C}^\beta(\mathbb{R}^n) \text{ で収束する.}\right\}$$

と定める．$\mu^W(\Omega_2)=1$ であることが知られている．$B\in\Omega_2$ に対して定まる (geometric) rough path $\mathbf{B}_{s,t}=\lim_{N\to\infty}(B^N_{s,t},\mathbb{B}^N_{s,t})$ を Brownian rough path という．

D は (A), (B) を満たすとし，$\sigma\in C^2_b(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d))$ を仮定する．$\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2$ とおき，$B\in\Omega$ に対して，$Y_t(B)=\lim_{k\to\infty}Y_t(B^{N_k})$ と定める．

また，B を Lipschitz path h で置き換えて得られる反射壁 ODE の一意解を $Y_t(h)$ と書くことにする．また，$h_{s,t}=h_t-h_s$, $\bar{h}^2_{s,t}=\int_s^t h_{s,u}\otimes dh_u$ で定まる smooth rough path を $\mathbf{h}$ と書くことにする．$Y_t(B)$ に対して，generic な B に対して連続性定理はまだ不明だが，h における連続性は解の一意性と Theorem 3 から従うことがわかる．

Lemma 4. 上記のように定めた強い解 $Y_t(B)$ $(B\in\Omega)$ は *Lipschitz path* の各元 h で連続である．正確に述べるため，$\beta'<\beta$ を取る．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$|||\mathbf{h}-\mathbf{B}|||_\beta\le\delta$ ならば $\|Y(B)-Y(h)\|_{\beta'}\le\varepsilon$.

次が反射壁確率微分方程式の解に対するサポート定理である．

Theorem 5. D は (A), (B) を満たし，$\sigma\in C^2_b$ とする．P^Y を *β-Hölder* 連続な空間 $\mathcal{C}^\beta$ 上の (3) の解 Y の確率分布とする．このとき，

$$\mathrm{Supp}\,(P^Y)=\overline{\{Y(h)\mid h\ \text{は}\ \textit{Lipschitz path.}\}}^{\|\ \|_\beta}.$$

Proof. Brownian rough path $\mathbf{B}_{s,t}$ は $\mathscr{C}^\beta(\mathbb{R}^n)$ 上の確率測度を誘導する．[10] により，smooth rough path $\mathbf{h}$ 全体はこの確率測度の位相的サポートに含まれることが知られている．この結果と Lemma 4 から包含関係 左辺 $\supset$ 右辺 が直ちに得られる．逆の包含関係は Wong-Zakai 型定理 (Lemma 2) からわかる． □

以下の例では，上の定理を用いるまでもなくサポートがわかるが，一般的に D ではヘルマンダー条件が成立しなくても境界の反射の効果が一種の "ヘルマンダー条件の成立" をもたらし，密度関数が正になるような状況があると思われる．

Example 6. $D=\{(x,y)\mid y\ge 0\}\subset\mathbb{R}^2$ における反射壁確率微分方程式

$$\begin{pmatrix}X_t\\Y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}B_t+\begin{pmatrix}0\\\Phi_t\end{pmatrix}$$

の解 (X_t,Y_t) の分布を考えてみよう．もちろん，B_t は 1 次元ブラウン運動である．この方程式は陽に解けて

$$X_t=B_t,\qquad Y_t=1+B_t+\max_{0\le s\le t}\left(-(1+B_s)\vee 0\right).$$

これから以下が直ちにわかる．

(1) 時刻 t を固定した 2 次元確率変数 (X_t,Y_t) の分布のサポートは，$\{(x,y)\mid y\ge x+1, y\ge 0\}$.

(2) さらに (X_t,Y_t) はこの集合上で正の密度関数をもつ．このことは，$(B_t,\min_{0\le s\le t}B_s)$ の分布の密度関数がわかるから，具体的に確かめられることである．

References

[1] S. Aida, Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms, arXiv:1608.03083.

[2] S. Aida, Reflected rough differential equations, Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no.9, 3570–3595.

[3] S. Aida, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Volume 100, 2014, 1–23.

[4] S. Aida and K. Sasaki, Wong-Zakai approximation of solutions to reflecting stochastic differential equations on domains in Euclidean spaces, Stochastic Process. Appl. Vol. 123 (2013), no.10, 3800-3827.

[5] S. Aida, S. Kusuoka and D. Stroock, On the support of Wiener functionals. 3–34, Pitman Res. Notes Math. Ser., 284, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[6] A.M. Davie, Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximations, Appl. Math. Res. Express. AMRX 2007, no. 2, Art. ID abm009, 40 pp.

[7] A. Deya, M. Gubinelli, M. Hofmanová and S. Tindel, One-dimensional reflected rough differential equations, arXiv:1610.07481v1.

[8] H. Doss and P. Priouret, Support d'un processus de réflexion, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 327–345.

[9] H. Doss and P. Priouret, Support d'un processus de réflexion, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 61 (1982), no. 3, 327–345.

[10] M. Ledoux, Z. Qian and T. Zhang, Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths. Stochastic Process. Appl. 102 (2002), no. 2, 265–283.

[11] P.L. Lions and A.S. Sznitman, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 4, 511537.

[12] A. Millet and M. Sanz-Solé, A simple proof of the support theorem for diffusion processes, In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, Lecture Notes in Math. **1583**, 36–48, Springer, Berlin.

[13] J. Ren and J. Wu, On approximate continuity and the support of reflected stochastic differential equations. Ann. Probab. 44 (2016), no. 3, 2064–2116.

[14] Y. Saisho, Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary, Probab. Theory Related Fields 74 (1987), no. 3, 455–477.

[15] D. Stroock and S.R.S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. III: Probability theory, 333–359. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

[16] T-S. Zhang, Strong Convergence of Wong-Zakai Approximations of Reflected SDEs in A Multidimensional General Domain, Potential Anal. 41 (2014), no.3, 783–815.